

La Providence – Montpellier

CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

RAPPEL : On appelle **cercle circonscrit à un triangle** le cercle qui passe par les 3 sommets de ce triangle.
Son centre est toujours le point de concours des **médiatrices** des 3 côtés de ce triangle.

Activité :

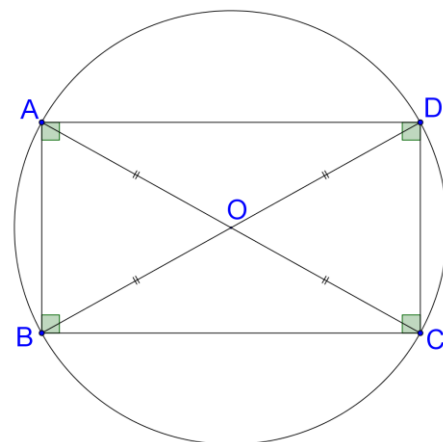
Construire un rectangle ABCD dont les diagonales se coupent en O.

On sait que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.

Propriété : Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

Donc O est le milieu de [AC] et [BD] et $OA = OB = OC = OD$.

Ainsi O est le centre du cercle passant par les 4 sommets A, B, C, D.



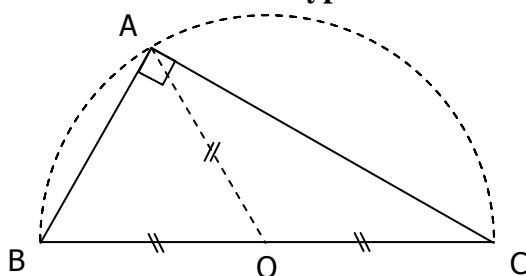
Un triangle rectangle correspond à un demi-rectangle coupé par une de ses diagonales.

Donc O est le centre du cercle passant par les sommets A, B et C.

I. CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE RECTANGLE.

Théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle :

Si un triangle est rectangle, ALORS le milieu de son hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.



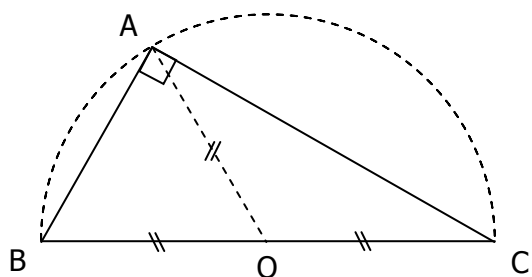
Dans ce cas, son hypoténuse est le diamètre de son cercle circonscrit.

On a : $OA = OB = OC$: le milieu de l'hypoténuse est équidistant des 3 sommets.

II. TRIANGLE RECTANGLE ET MEDIANE.

Propriété :

Si un triangle est rectangle, ALORS la médiane relative à son hypoténuse a pour longueur la moitié de la longueur de son hypoténuse.



En effet : [OA], [OB] et [OC] sont des rayons

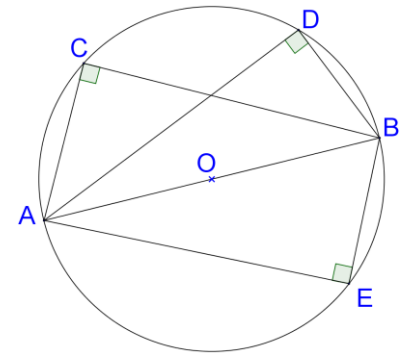
$$OA = OB = OC$$

$$\text{Donc : } OA = \frac{1}{2} \times BC \quad \text{et} \quad BC = 2 \times OA$$

III. CARACTERISATION D'UN TRIANGLE RECTANGLE.

Réciproque du théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle

SI un triangle est inscrit dans un cercle
et si un de ses côtés est un diamètre de ce cercle,
ce triangle est rectangle et son hypoténuse est un diamètre du cercle.



On dit aussi :

Si trois points sont sur un cercle, et si deux de ces points forment un diamètre de ce cercle, alors le triangle est rectangle et il a pour hypoténuse ce côté.

Application :

SI point M appartenant au cercle de diamètre [BC], alors le triangle BMC est rectangle en M.

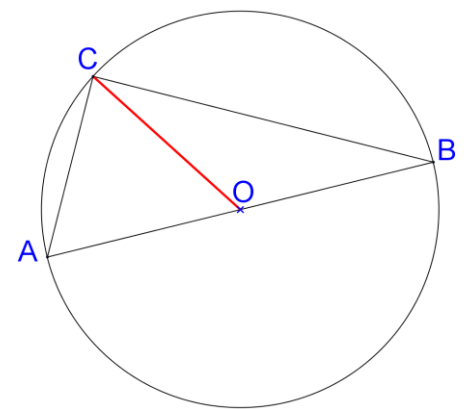
IV. THEOREME DE LA MEDIANE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE.

Propriété :

Si une médiane relative à un côté d'un triangle mesure la moitié de ce côté, ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

On dit aussi:

Si le milieu d'un côté est équidistant des trois sommets, alors le triangle est rectangle.



Application :

SI un point O est le milieu de [AB] et si $OA = OB = OC$, alors le triangle ABC est rectangle en C et [AB] est un diamètre de son cercle circonscrit.